

Podcasting Mathematics

---

数学ポッドキャスト

香川 亮

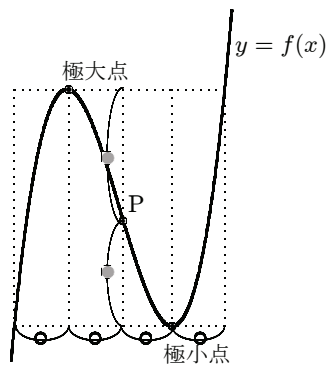
# Lecture 1 微分法 (数学Ⅱ)

## 1・1 3次曲線の等分性 ～グラフから読み取る～

(podcastNo. pm0101)

まず、3次曲線には対称性といった重要な特徴があります。

下のグラフを見てください。



図のように、極大点と極小点の midpoint P を中心として点対称であることが分かっています。これが「3次曲線の対称性」と呼ばれるものです。また、「等分性」と言って、極大値と極小値を通る長方形を作ると、ちょうど横の長さが4等分できることも分かっています。

今回のポイント

3次曲線は長方形にぴったりくっつく形になる。

さらに、3次曲線は真ん中の点（数学Ⅲ的には「変曲点」と呼ばれる点です）で点対称になっている！このことから、極大点と極小点はその点において対称な点同士の関係である！

## 【講義問題】

### 問題 1

check 

関数  $f(x) = 2x^3 - 3(a+1)x^2 + 6ax$  について、次の問いに答えよ。ただし、 $a > 1$  とする。

(1)  $f(x)$  の極値を求めよ。

(2)  $0 \leq x \leq 4$  における  $f(x)$  の最大値を求めよ。

[神奈川大学]

### 問題 2

check 

関数  $f(x) = x^3 + 3px^2 + qx + r$  は  $x = a$  で極大値、 $x = b$  で極小値をとる。また、曲線  $y = f(x)$  上の 2 点  $(a, f(a))$ 、 $(b, f(b))$  の中点  $M$  は  $x$  軸上にあるとする。

(1)  $a + b, ab$  を  $p, q$  を用いて表せ。また、 $r$  を  $p, q$  を用いて表せ。

(2) 方程式  $f(x) = 0$  の 3 つの実数解のうち最大の解を  $p, q$  を用いて表せ。 [北里大学]

### 問題 3

check 

3 次関数  $f(x) = x^3 + 3x^2 + x + a$  について、極大値と極小値の和が 8 になるとき、定数  $a$  の値を求めよ。 [埼玉大学]

### 問題 4

check 

3 次関数  $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$  は  $x = 1$  で極大値 1、 $x = 3$  で極小値 0 をとる。定数  $a, b, c, d$  の値を求めよ。 [東京理科大学]

【講義問題の解答】

問題 1

関数  $f(x) = 2x^3 - 3(a+1)x^2 + 6ax$  について、次の問いに答えよ。ただし、 $a > 1$  とする。

- (1)  $f(x)$  の極値を求めよ。  
 (2)  $0 \leq x \leq 4$  における  $f(x)$  の最大値を求めよ。

最大値・最小値はグラフを描いて考えるのが基本です（1・5参照）。ところが、極小値の  $x$  座標は  $a$  でありはっきりしていません。そのために、変域の右端である  $x = 4$  のときの  $y$  座標が最大値になるのかが分からなくなっています。

(1)

$$\begin{aligned} f'(x) &= 6x^2 - 6(a+1)x + 6a \\ &= 6(x-a)(x-1) \end{aligned}$$

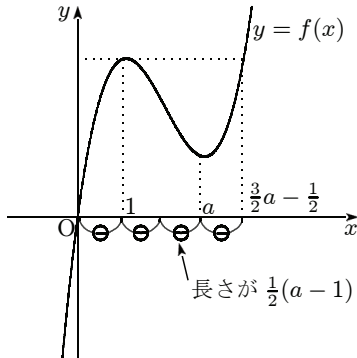
であるから、 $x = a, 1$  で  $f'(x) = 0$  であり、

$x$		1		$a$	
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$		↗		↘	

極大値  $f(1) = -1 + 3a$ , 極小値  $f(a) = -a^3 + 3a^2$  //

◀  $a$  と 1 の大小に注意。

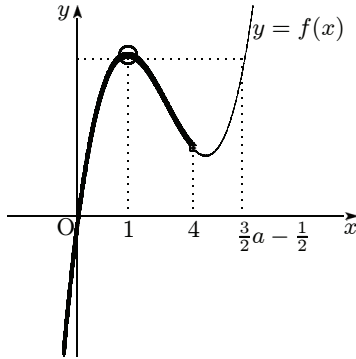
(2)



3次曲線の対称性より、極大点と同じ  $y$  座標を持つ点の  $x$  座標を  $t$  とすると

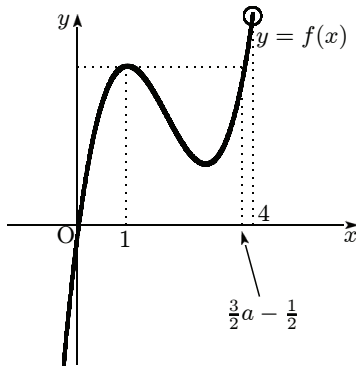
$$\star \quad t = a + \frac{1}{2}(a-1) = \frac{3}{2}a - \frac{1}{2}$$

$$(i) \quad \underline{4 \leq \frac{3}{2}a - \frac{1}{2} \iff a \geq 3 \text{ のとき}}$$



グラフより、最大値は  $f(1) = -1 + 3a$

$$(ii) \quad \underline{4 \geq \frac{3}{2}a - \frac{1}{2} \iff 1 < a \leq 3 \text{ のとき}}$$



グラフより、最大値は  $f(4) = 80 - 24a$

$$\text{以上より} \quad \underline{\begin{cases} -1 + 3a & (a \geq 3) \\ 80 - 24a & (1 < a \leq 3) \end{cases}}$$

◀ 極小値の  $x$  座標  $a$  から、4等分した長さ  $\frac{1}{2}(a-1)$  を加えた、という意味。

◀  $a > 1$  という条件を忘れずに！

**問題 2**

関数  $f(x) = x^3 + 3px^2 + qx + r$  は  $x = a$  で極大値,  $x = b$  で極小値をとる。また, 曲線  $y = f(x)$  上の 2 点  $(a, f(a)), (b, f(b))$  の中点 M は  $x$  軸上にあるとする。

- (1)  $a + b, ab$  を  $p, q$  を用いて表せ。また,  $r$  を  $p, q$  を用いて表せ。  
 (2) 方程式  $f(x) = 0$  の 3 つの実数解のうち最大の解を  $p, q$  を用いて表せ。

3 次方程式  $f(x) = 0$  の解は因数分解で考えます。3 次式の因数分解の基本は因数定理です。ところが, この方程式  $f(x) = 0$  は  $x$  に何を代入すると左辺が 0 になるかが, 非常に分かりにくくなっています。どう (1) の結果を利用すればよいのでしょうか?

- (1)  $f'(x) = 3x^2 + 6px + q$  であるから,  $f'(x) = 0$  の 2 解を  $x = a, b$  とおくと,  $x = a, b$  で極値をとることが分かる。

よって, 解と係数の関係より

$$\underline{a + b = -2p, \quad ab = \frac{q}{3}} \quad \dots \textcircled{1}$$

また, 極大点と極小点の中点が  $x$  軸上にあるので,

$$\frac{1}{2} \{f(a) + f(b)\} = 0$$

$$\frac{1}{2} \{(a^3 + b^3) + 3p(a^2 + b^2) + q(a + b) + 2r\} = 0$$

$$(a^3 + b^3) + 3p(a^2 + b^2) + q(a + b) + 2r = 0$$

$$\{(a + b)^3 - 3ab(a + b)\} + 3p\{(a + b)^2 - 2ab\} + q(a + b) + 2r = 0$$

$$(-2p)^3 - 3 \cdot \frac{q}{3} \cdot (-2p) + 3p \cdot \{(-2p)^2 - 2 \cdot \frac{q}{3}\} + q(-2p) + 2r = 0$$

$$\underline{r = -2p^3 + pq}$$

- (2) (1) の結果より, 極大点と極小点の中点が  $x$  軸上にある。また,

★ 3 次曲線の対称性より, その中点は 3 次曲線の対称の中心であるから  $y = f(x)$  上にある。

これより, 方程式  $f(x) = 0$  の解の 1 つがその中点である。

$$x = \frac{a + b}{2} = \frac{-2p}{2} = -p \quad (\because \textcircled{1})$$

よって, 因数定理より  $f(x)$  は  $(x + p)$  を因数に持つ。

◀  $ax^2 + bx + c = 0$  の解が  $x = \alpha, \beta$  のとき,

$$\alpha + \beta = -\frac{b}{a}$$

$$\alpha\beta = \frac{c}{a}$$

◀  $a^3 + b^3, a^2 + b^2$  は和と積で表せます。

◀ ①を代入。

◀ つまり,  $x = -p$  は中点かつ  $x$  軸上にあるということです。

これより, (1) の結果とあわせて変形すると

$$x^3 + 3px^2 + qx + r = 0$$

$$x^3 + 3px^2 + qx - 2p^3 + pq = 0$$

$$(x + p)(x^2 + 2px - 2p^2 + q) = 0$$

方程式の解は

$$x = -p, x^2 + 2px - 2p^2 + q = 0 \iff x = -p, -p \pm \sqrt{3p^2 - q}$$

この解の中で最も大きい解は

$$\underline{x = -p + \sqrt{3p^2 - q}} //$$

**問題3**

3次関数  $f(x) = x^3 + 3x^2 + x + a$  について、極大値と極小値の和が8になるとき、定数  $a$  の値を求めよ。

問題2の結果をよく復習してから問題に取り組みましょう。極大値と極小値の和が8ということは、極大点と極小点の midpoint は  $y$  座標が4であるということですね。

$$f'(x) = 3x^2 + 6x + 1$$

$f'(x) = 0$  の異なる2実解を  $x = \alpha, \beta$  とすると、 $x = \alpha, \beta$  で極値をとる。解と係数の関係より

$$\alpha + \beta = -2 \dots \textcircled{1}$$

条件より、極大点と極小点の midpoint は  $y$  座標が4である。

★ 3次曲線の対称性よりその点は  $y = f(x)$  上であるから、

$$f\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) = 4$$

$$f\left(\frac{-2}{2}\right) = 4 \quad (\because \textcircled{1})$$

$$f(-1) = 4$$

$$1 + a = 4 \quad \underline{\underline{a = 3}}$$

◀  $ax^2 + bx + c = 0$   
の解が  $x = \alpha, \beta$  のとき、  
 $\alpha + \beta = -\frac{b}{a}$   
 $\alpha\beta = \frac{c}{a}$

**問題 4**

3次関数  $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$  は  $x = 1$  で極大値 1,  $x = 3$  で極小値 0 をとる。定数  $a, b, c, d$  の値を求めよ。

<解法 I 一般的な解法>

$$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$$

$x = 1$  で極大値 1,  $x = 3$  で極小値 0 をとるので,

$$\begin{cases} f'(1) = 0 \\ f(1) = 1 \\ f'(3) = 0 \\ f(3) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 3a + 2b + c = 0 \\ a + b + c + d = 1 \\ 27a + 6b + c = 0 \\ 27a + 9b + 3c + d = 0 \end{cases}$$

以上を連立して  $a = \frac{1}{4}$ ,  $b = -\frac{3}{2}$ ,  $c = \frac{9}{4}$ ,  $d = 0$

逆にこのとき,  $f(x) = \frac{1}{4}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{9}{4}x$  であるから,

$$f'(x) = \frac{3}{4}(x-1)(x-3) \text{ となるので,}$$

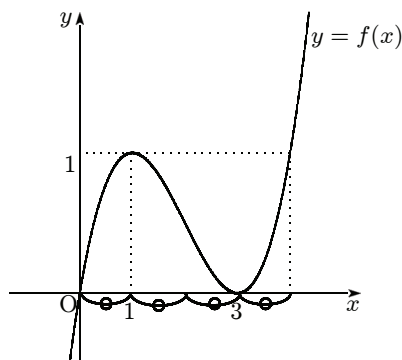
$x$		1		3		
$f'(x)$	+	0	-	0	+	
$f(x)$		↗	1	↘	0	↗

増減表より確かに  $x = 1$  で極大値 1,  $x = 3$  で極小値 0 をとる。

$$\underline{\underline{a = \frac{1}{4}, b = -\frac{3}{2}, c = \frac{9}{4}, d = 0}} //$$

◀ 微分した値が 0 だからといって極値になるわけではありません。よって確認が必要です。

<解法 II 等分性を利用した解法>



★ 3次曲線の等分性より、 $x$ 軸との共有点は $x=0,3$ (接点)である。

よって、求める3次関数は

$$f(x) = ax(x-3)^2$$

とおける。これが極大値  $(1, 1)$  を通るので代入して

$$1 = a(1-3)^2 \quad \therefore a = \frac{1}{4}$$

以上より

$$f(x) = \frac{1}{4}x(x-3)^2 = \frac{1}{4}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{9}{4}x$$

$$\underline{a = \frac{1}{4}, b = -\frac{3}{2}, c = \frac{9}{4}, d = 0} //$$

◀ 共有点とは、交点と接点をまとめた呼び名です。

◀  $a$  を忘れないように！